1)

$$\det\begin{pmatrix} 1&3&0&0&0\\ 1&4&3&0&0\\ 0&1&4&3&0\\ 0&0&1&4&3\\ 0&0&0&1&4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2=r_2-r_1} = \det\begin{pmatrix} 1&3&0&0&0\\ 0&1&3&0&0\\ 0&1&4&3&0\\ 0&0&1&4&3\\ 0&0&0&1&4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3=r_3-r_2} = \det\begin{pmatrix} 1&3&0&0&0\\ 0&1&3&0&0\\ 0&0&\boxed{1}&\boxed{3}&\boxed{0}\\ 0&0&\boxed{1}&\boxed{4}&\boxed{3}\\ 0&0&\boxed{0}&\boxed{1}&\boxed{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1&3&0&0&0\\ 0&1&3&0&0\\ 0&0&1&3&0\\ 0&0&0&\boxed{1}&\boxed{3}\\ 0&0&0&\boxed{1}&\boxed{4} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1&3\\ 1&4 \end{pmatrix} = 1$$

$$1\cdot 4 - 1\cdot 3$$

2)

$$\det\begin{pmatrix} x&a_1&a_2&a_3\\ a_1&x&a_2&a_3\\ a_1&a_2&x&a_3\\ a_1&a_2&a_3&x \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \overbrace{x+a_1+a_2+a_3}^{y}&a_1&a_2&a_3\\ x+a_1+a_2+a_3&x&a_2&a_3\\ x+a_1+a_2+a_3&a_2&x&a_3\\ x+a_1+a_2+a_3&a_2&a_3&x \end{pmatrix} = y\det\begin{pmatrix} 1&a_1&a_2&a_3\\ 1&x&a_2&a_3\\ 1&a_2&x&a_3\\ 1&a_2&a_3&x \end{pmatrix}$$

$$-a_1 \quad -a_1 \quad -a_3$$

$$= y\det\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 1&x-a_1&0&0\\ 1&a_2-a_1&x-a_2&0\\ 1&a_2-a_1&a_3-a_2&x-a_3 \end{pmatrix}$$

$$y(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$$

3)

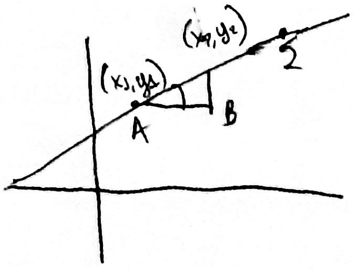
$$\det\begin{pmatrix} x&y&1\\ x_1&y_1&1\\ x_2&y_2&1 \end{pmatrix} = 0$$

Ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

κάνω πράξεις

$$x(y_1-y_2)-x_1(y-y_2)+x_2(y-y_1)=0$$

$$x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+x_1y_2-y_1x_2=0$$




$\vec{AB}=(x_2-x_1,\,y_2-y_1)$

$\vec{AΣ}=(x-x_1,\,y-y_1)$

Αν το x κ' y είναι πρώτου βαθμού είναι ευθεία. Η εξίσωση της ευθείας είναι πρωτοβάθμια

(*) Αυτή η ορίζουσα δίνει μια εξίσωση πρώτου βαθμού ως προς x κ' y. Άρα δηλώνει ευθεία.

Η ευθεία αυτή διέρχεται από το (x,y), αφού τα $\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}=0$, δηλαδή την ικανοποιεί. Το ίδιο κ' για το άλλο σημείο. Επειδή μια ευθεία καθορίζεται από δύο σημεία είναι η ζητούμενη

4) Επίπεδο που διέρχεται από 3 σημεία

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Εξίσωση επιπέδου: $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$

3 μεταβλητές (πρωτοβάθμιες) που συνδέονται μεταξύ τους.

άρα δηλώνουν επίπεδο

Αν $\gamma\neq 0$: $z=\delta-\frac{\alpha}{\gamma}x-\frac{\beta}{\gamma}y$

Εξίσωση πρώτου βαθμού ως προς x, y, z, άρα εκφράζει επίπεδο.

Το επίπεδο αυτό διέρχεται από τα σημεία $(x_1,y_1,z_1)$, $(x_2,y_2,z_2)$, $(x_3,y_3,z_3)$, αφού αν αντικαταστήσουμε τα $(x,y,z)$ με αυτά την ικανοποιούν. Άρα το ζητούμενο επίπεδο.

5) $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n-x_1 & y_n-y_1 & 0 \end{pmatrix}$

$\exists t\neq 0: t(x_2-x_1, y_2-y_1)=(x_3-x_1, y_3-y_1)$

$t(x_2-x_1)=x_3-x_1$

$t(y_2-y_1)=y_3-y_1$

Για να μην έχουμε rank 3 κ' για όλες τις υπόλοιπες γραμμές

Άλλη)

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=(n+1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=(n+1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Y \le V$

$S$ βάση του $Y \Rightarrow \exists$ επέκταση του $S$

Δηλαδή $S \subseteq S'$ ώστε το $S'$ να είναι βάση του $V$

Πρόταση: Αν $Y_1, Y_2 \le V$, τότε κ' η τομή $Y_1 \cap Y_2 \le V$, αλλά η ένωση $Y_1 \cup Y_2 \le V$ $\Leftrightarrow Y_1 \le Y_2$ ή $Y_2 \le Y_1$

Απόδειξη: Έστω $u_1, u_2 \in Y_1 \cap Y_2 \Leftrightarrow u_1, u_2 \in Y_1$ κ' $Y_2$

$u_1, u_2 \in Y_1 \Rightarrow r u_1 + r' u_2 \in Y_1$, διότι $Y_1 \le V$

$u_1, u_2 \in Y_2 \Rightarrow r u_1 + r' u_2 \in Y_2$ $\quad Y_2 \le V$

Άρα $r_1 u_1 + r' u_2 \in Y_1 \cap Y_2$

$Y_1 \cup Y_2 \le V \Leftrightarrow Y_1 \le Y_2$ ή $Y_2 \le Y_1$

$Y_1 \cup Y_2 = Y_2$ "$\Leftarrow$" $Y_1 \le Y_2$

$Y_1 \cup Y_2 \le V$ "$\Rightarrow$"

Δεν ισχύει $Y_1 \le Y_2$ ούτε $Y_2 \le Y_1$. Άρα $\exists u_1 \in Y_1 - Y_2$ κ' $u_2 \in Y_2 - Y_1$

$u_1, u_2 \in Y_1 \cup Y_2 \le V$. Άρα $u_1 + u_2 \in Y_1 \cup Y_2 \Rightarrow u_1 + u_2 \in Y_1$ ή $u_1 + u_2 \in Y_2$

$\left.\begin{array}{l} u_1 + u_2 \in Y_1 \\ u_1 \in Y_1 \end{array}\right\} \Rightarrow u_1 + u_2 - u_1 \in Y_1 \Rightarrow u_2 \in Y_1$, άτοπο

Π.χ. Να βρεθεί η τομή των υποχώρων $Y_1 = \{x+y+z+w=0 \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$

$Y_2 = \langle (1,1,1,1), (1,0,1,0), (2,3,4,5) \rangle$

$S_2 = \{(1,1,1,1), (1,0,1,0), (2,3,4,5)\}$

$(0,0,0,0) = a(1,1,1,1) + b(1,0,1,0) + \gamma(2,3,4,5)$

Θέλουμε λύνοντας το σύστημα να καταλήξουμε $a = b = \gamma = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

rank = 3.

Οι γραμμές του είναι ανεξ.

$Y_2 = <(1,1,1,1),(1,0,1,0),(2,3,4,5)> = <(1,0,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)>$

$\dim Y_2 = 3$ *

Να βρούμε βάση του $Y_1 \ni (x,y,z,w) \Leftrightarrow x+y+z+w=0 \Rightarrow w=-x-y-z$

Τυχαίο $(x,y,z,w) = (x,y,z,-x,-y,-z)$ = χωρίζουμε τους αγνώστους

$(x,0,0,-x)+(0,y,0,-y)+(0,0,z,-z) = x(1,0,0,-1)+y(0,1,0,-1)+z(0,0,1,-1) \Rightarrow$

$Y_1 = <(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)>$ κ' είναι κ' γραμμ. ανεξ.

Τώρα βρούμε την τομή.

Θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο της $Y_1 \cap Y_2$. Άρα ανήκει κ' στον $Y_1$ κ' στον $Y_2$.

$\alpha(1,0,0,-1)+\beta(0,1,0,-1)+\gamma(0,0,1,-1)=\kappa(1,0,1,0)+\lambda(0,1,0,1)+\mu(0,0,1,1)$

Θέλουμε σχέση είτε μεταξύ των α, β, γ είτε μεταξύ των κ, λ, μ.

| | |
|---|---|
| $\alpha=\kappa$ | $\cancel{2}\mu=-\cancel{2}\kappa-\cancel{2}\lambda$ |
| $\beta=\lambda$ | $\mu=-\kappa-\lambda$ |
| $\gamma=\kappa+\mu$ | |
| $-\alpha-\beta-\gamma=\lambda+\mu$ | $-\kappa-\lambda-\kappa-\mu=\lambda+\mu$ |

Τυχαίο της τομής είναι

$\kappa(1,0,1,0)+\lambda(0,1,0,1)$
$+(-\kappa-\lambda)(0,0,1,1)$
$\kappa[(1,0,1,0)-(0,0,1,1)]+\lambda[(0,1,0,1)-(0,0,1,1)]=$
$=\kappa(1,0,0,-1)+\lambda(0,1,-1,0)$

$Y_1 \cap Y_2 = <(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)>$

$\dim Y_1 \cap Y_2 = 2$

$Y_1, Y_2 \leq \mathbb{R}^4$ $\dim \mathbb{R}^4 = 4$

$\dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim Y_1 \cap Y_2 = 4$

* $Y_1 = <(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)>$

$\dim Y_1 = 3$

$Y_1 + Y_2 = \left\langle \begin{matrix} (1,0,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1) \\ (1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1) \end{matrix} \right\rangle$

π.χ. $Y_1 = <(1,0,0,0)>$ $\dim Y_1 = 1$

$Y_2 = <(0,1,0,0)>$ $\dim Y_2 = 1$

$Y_1 \cap Y_2 = \{(0,0,0,0)\}$ $\dim Y_1 \cap Y_2 = 0$

$Y_1+Y_2=\langle(1,0,0,0),(0,1,0,0)\rangle$
$\dim(Y_1+Y_2)=2$

$\dim Y_1+\dim Y_2-\dim Y_1\cap Y_2=2=\dim(Y_1+Y_2)$

Παρατήρηση: Στο προηγούμενο π.χ. $Y_1\cap Y_2\neq\{(0,0,0,0)\}$
Στο νέο π.χ. $Y_1\cap Y_2=\{(0,0,0,0)\}$

Ορισμός: Δύο υπόχωροι $Y_1, Y_2$ ενός δ.χ. $V$ θα λέμε ότι αποτελούν ευθύ άθροισμα αν $Y_1\cap Y_2=\{\bar{0}\}$. Τότε γράφουμε $Y_1\oplus Y_2$.

Υπενθύμιση: Αν $Y_1, Y_2\leq V$, τότε $Y_1+Y_2=\{u_1+u_2 \mid u_1\in Y_1, u_2\in Y_2\}\leq V$
$Y_1\cup Y_2\nleq V$ όχι πάντα
$\langle Y_1\cup Y_2\rangle$ = ο υπόχωρος που γεννάται από τα στοιχεία της ένωσης $Y_1\cup Y_2$.

ΛΗΜΜΑ: Αν $Y_1, Y_2\leq V$ δ.χ., τότε $Y_1+Y_2=\langle Y_1\cup Y_2\rangle$

Απόδειξη: $\langle Y_1\cup Y_2\rangle$ αυτό εμπεριέχει όλους τους δυνατούς γραμμικούς συνδυασμούς με στοιχεία από το $Y_1$ κ' το $Y_2$.
$\langle Y_1\cup Y_2\rangle=\{\alpha u_1+\beta u_2 \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}, u_1\in Y_1, u_2\in Y_2\}$

$$\left.\begin{array}{l} Y_1\leq Y_1+Y_2 \\ Y_2\leq Y_1+Y_2\end{array}\right\} \Rightarrow Y_1\cup Y_2\subseteq Y_1+Y_2\leq V$$

Το $Y_1+Y_2$ περιέχει όλους τους δυνατούς γρ. συνδ. στοιχείων από το $Y_1$ κ' $Y_2$.
Άρα $\langle Y_1\cup Y_2\rangle\leq Y_1+Y_2$.
Θέλουμε επίσης $Y_1+Y_2\subseteq\langle Y_1\cup Y_2\rangle$
$u_1+u_2\in Y_1+Y_2$
$u_1,u_2\in Y_1\cup Y_2\Rightarrow u_1+u_2\in\langle Y_1\cup Y_2\rangle$
Δηλαδή $Y_1+Y_2\subseteq\langle Y_1\cup Y_2\rangle$

# ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

Έστω $Y_1, Y_2 \leq V$ δ.χ. Τότε ισχύει $\dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim Y_1 \cap Y_2 = \dim(Y_1 + Y_2)$

**Απόδειξη** Έστω $\dim Y_1 = k$, $\dim Y_2 = m$, $\dim Y_1 \cap Y_2 = \ell$. Άρα $\ell \leq \min\{k, m\}$.

Έστω $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ μία βάση της $Y_1 \cap Y_2$.

$Y_1 \cap Y_2 \leq Y_1$. Την επεκτείνω τη βάση

$\leq Y_2$.

$\{v_1, \dots, v_\ell, u_{\ell+1}, \dots, u_k\}$ βάση του $Y_1$

$\{v_1, \dots, v_\ell, w_{\ell+1}, \dots, w_m\}$ βάση του $Y_2$.

$u_i \notin Y_2$

$w_j \notin Y_1$ Διαφορετικά $u_i \in Y_1 \cap Y_2$ αδύνατο

$w_j \in Y_1 \cap Y_2$ αδύνατο

γιατί αλλιώς η τομή θα έχει παραπάνω στοιχεία όποτε $\dim Y_1 \cap Y_2 > \ell$, άτοπο

βάση του $Y_1 + Y_2$: $S = \{v_1, \dots, v_\ell, u_{\ell+1}, \dots, u_k, w_{\ell+1}, \dots, w_m\}$

Αυτό το σύνολο περιέχει $\cancel{\ell} + k - \cancel{\ell} + m - \ell = k + m - \ell$

Αν δδ το σύνολο $S$ είναι η βάση του $Y_1 + Y_2$, τελειώσαμε, γιατί τότε θα έχουμε $\dim Y_1 + Y_2 = \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim Y_1 \cap Y_2 = k + m - \ell$

Έστω $u + w \in Y_1 + Y_2$ με $u \in Y_1$ κ' $w \in Y_2$

$u = a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell + a_{\ell+1} u_{\ell+1} + \dots + a_k u_k$

$w = b_1 v_1 + \dots + b_\ell v_\ell + b_{\ell+1} w_{\ell+1} + \dots + b_m w_m$

άρα το $S$ παράγει το $Y_1 + Y_2$

$u + w = (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_\ell + b_\ell) v_\ell + a_{\ell+1} u_{\ell+1} + b_{\ell+1} w_{\ell+1} + \dots + a_k u_k + b_m w_m$

$u + w \in Y_1 + Y_2 \Rightarrow$

Άρα $u + w \in \langle S \rangle \Rightarrow Y_1 + Y_2 \leq \langle S \rangle$

κ' $S \leq Y_1 + Y_2 \Rightarrow \langle S \rangle \leq Y_1 + Y_2$ $\Big\} \Rightarrow Y_1 + Y_2 = \langle S \rangle$ άρα το $S$ παράγει το $Y_1 + Y_2$

Αν τα στοιχεία του $S$ είναι κ' γρ. ανεξ, τότε το $S$ θα είναι βάση

Εξετάζουμε τη γρ. ανεξαρτησία.

$\bar{0} = a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell + a_{\ell+1} v_{\ell+1} + \dots + a_k v_k + a_{k+1} w_{\ell+1} + \dots + a_{k+m-\ell} w_m$

$\underbrace{v_0 = a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell + a_{\ell+1} v_{\ell+1} + \dots + a_k v_k}_{Y_1} = \underbrace{-a_{k+1} w_{\ell+1} - \dots - a_{k+m-\ell} w_m}_{\in Y_2}$

$v_0 \in Y_1 \cap Y_2 = \langle \{v_1, \dots, v_\ell\} \rangle$, άρα $v_0 = k_1 v_1 + \dots + k_\ell v_\ell$, $k_1, \dots, k_\ell \in \mathbb{F}$

οπότε $k_1 v_1 + \dots + k_\ell v_\ell + a_{k+1} w_{\ell+1} + \dots + a_{k+m-\ell} w_m = \bar{0}$

όμως το σύνολο $\{v_1, \dots, v_\ell, w_{\ell+1}, \dots, w_m\}$ είναι βάση του υποχώρου $Y_2$

άρα $k_1 = \dots = k_\ell = a_{k+1} = \dots = a_{k+m-\ell} = 0$ (1)

οπότε $v_0 = 0$

άρα $a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell + a_{\ell+1} v_{\ell+1} + \dots + a_k v_k = \bar{0}$

Το σύνολο $\{v_1, \dots, v_\ell, v_{\ell+1}, \dots, v_k\}$ είναι βάση του υποχώρου $Y_1$, οπότε

$a_1 = \dots = a_\ell = a_{\ell+1} = \dots = a_k = 0$ (2)

Συνεπώς από (1),(2): $a_1 = \dots = a_\ell = a_{\ell+1} = \dots = a_k = a_{k+1} = \dots = a_{k+m-\ell} = 0$

οπότε το $S$ είναι γρ. ανεξ. Επομένως το $S$ είναι βάση του $Y_1 + Y_2$

__Πόρισμα__: Το άθροισμα $Y_1 + Y_2$ δύο υποχώρων είναι ευθύ αν: $\dim(Y_1 + Y_2) = \dim Y_1 + \dim Y_2$

π.χ. Βρείτε ένα ευθύ συμπλήρωμα αθροίσματος το $Y_1 = \{(x, y, z, w) \mid x + y + z + w = 0, x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$

$Y_1 = \langle (1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1) \rangle$ με $\dim Y_1 = 3$

Θέλουμε $Y_2$ ώστε $\underline{Y_1 \cap Y_2 = \emptyset}$ κ' $\underline{Y_1 \oplus Y_2 = \mathbb{R}^4}$

Δηλαδή ζητάμε ένα ευθύ συμπλήρωμα του $Y_1$

Έχουμε: 1) $Y_1 + Y_2 = \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow \dim(Y_1 + Y_2) = 4$

2) $Y_1 \cap Y_2 = \{0\} \Leftrightarrow \dim(Y_1 \cap Y_2) = 0$

Από το θεώρημα διάστασης προκύπτει $\dim Y_2 = 1$

Ζητάμε ένα σύνολο ώστε να είναι γραμμικά ανεξάρτητο με τη βάση του $Y_1$

Δοκιμάσε το $(1,0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ με rank 4 $\Rightarrow$ Αυτά είναι γρ. ανεξ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Το ευθύ συμπλήρωμα δεν είναι μοναδικό όταν $Y_1 \lneq V$

(7x) Έστω $Y_1 \leq \mathbb{R}_3[x]$ με $Y_1 = \langle x^2+x, x-3, x^2-1 \rangle$

Βρείτε ένα ευθύ συμπλήρωμα του $Y_1$.

$\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$ κ' $\mathbb{R}_3[x] = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$

Εξετάζουμε αν τα $x^2+x, x-3, x^2-1$ είναι γρ. ανεξ.

$a(x^2+x) + \beta(x-3) + \gamma(x^2-1) = 0$

$(a+\gamma)x^2 + (a+\beta)x - 3\beta - \gamma = 0$

Άρα $\begin{cases} a+\gamma = 0 \\ a+\beta = 0 \\ -3\beta - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \beta = \gamma = 0$

Άρα $\{x^2+x, x-3, x^2-1\}$ παράγει το $Y_1$ κ' είναι γρ. ανεξ. Άρα είναι βάση του $Y_1$, οπότε $\dim Y_1 = 3$

Ζητάμε $Y_2$ ώστε $Y_1 \oplus Y_2 = \mathbb{R}_3[x]$ κ' $\dim Y_2 = 1$, ώστε $\dim(Y_1 \oplus Y_2) =$
$= \dim Y_1 + \dim Y_2 \Rightarrow 3 + 1 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[x]$

Πρέπει $\dim Y_2 = 1$. Δοκιμάζουμε $Y_2 = \langle 1 \rangle$

$a(x^2+x) + \beta(x-3) + \gamma(x^2-1) + \delta \cdot 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\gamma=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ -3\beta-\gamma+\delta=0 \end{array}\right\}$$

Δεν έχουμε χρησιμοποιήσει το $x^3$
Άρα το 1 που επιλέξαμε δεν υπάρχει περίπτωση να συμπληρώσει τον Χ1 κ' έχουμε κ' το πολύ $x^3$

Μία καλή επιλογή είναι $Y_2 = \langle x^3 \rangle$
Τώρα το σύνολο

$\{x^2+x, x-3, x^2-1, x^3\}$ γεννά τον $\mathbb{R}_3[x]$ κ' είναι γρ. ανεξάρτητο.

Ενώ το $\{x^2+x, x-3, x^2-1, 1\}$ δεν γεννά τον $\mathbb{R}_3[x]$